Modelbegrip

Inleiding

De uitzending 'ABA live' van Theodor Holman op woensdag 3 oktober 2012 op Radio 5 met Prof. Dr. Ir. Mieke Boon als hoofdgast over wetenschapsfilosofie, maar vooral het stukje over haar in de VPRO gids, zet mij aan om eens op te schrijven wat wetenschappelijk denken eigenlijk inhoudt, althans....
In mijn verhaal: "De begrippen Architectuur, Uitrusting en Realisatie als hulpmiddel bij het ontwerpen" (op deze website), schurk ik al tegen het 'Model-begrip' aan zonder het expliciet te noemen. Onder het hoofdje '3.6 Overbelasting' gebruik ik de telefoon als voorbeeld: het lijkt alsof alle telefoons in de wereld met onze telefoon verbonden zijn en dat je een van de verbindingen kunt kiezen. Dat valt dáár onder het begrip: Architectuur. In feite is het een **voorstelling van de werkelijkheid** die niet houdbaar blijkt bij overbelasting. Zo'n voorstelling-van-de-werkelijkheid noemen we een **model**.

Indertijd, in het begin van de 70-er jaren, is er een reeks uitzendingen geweest door TELEAC over 'modellen'. Ik was zeer gemotiveerd om die te bekijken omdat ik in mijn studietijd een keer beetgenomen ben door Meijer, docent electrotechniek, die als proefwerk de opgave: 'Motiveer de complexe rekenwijze', gaf. Ik kreeg geen letter op papier! Ik had geen idee van modellen en wist al helemaal niet dat 'complex rekenen' een model was in de wisselstroomtechniek. Later gaf ik er les in! Van die lessen wil ik hier een globale neerslag geven.

Wat is een model?

Een model is *een voorstelling van de werkelijkheid*. **Een mens kan alleen maar in modellen denken!** Zijn waarneming is beperkt evenals zijn denkraam. De werkelijkheid wordt vereenvoudigd om er iets mee aan te kunnen vangen. Wetenschap is het bedenken en verfijnen van modellen zodat ze 'beter' de werkelijkheid benaderen en deze beter verklaarbaar en hanteerbaar maken. <u>De 'werkelijkheid' wordt geabstraheerd van de details waar we niets mee aan kunnen vangen.</u>

Rob Wijnberg in De Correspondent:
In zijn boek *Waarheid en Cultuur* constateert de Duitse filosoof Friedrich Nietzsche dat
'taal ontstaat door het gelijkstellen van het niet-gelijke'.
Ter illustratie noemt hij het woord 'boom': geen enkele boom in de wereld is gelijk aan een andere, en toch noemen wij ieder exemplaar een 'boom'. Een dergelijke generalisatie is niet meer dan logisch: het is simpelweg onmogelijk alle verschillen – ieder twijgje, ieder blaadje, iedere kleurschakering – in een aparte term te vangen zonder te verdrinken in een bodemloze put.
Met andere woorden, **taal is per definitie een fundamentele abstractie van de eindeloos complexe werkelijkheid** om ons heen, teneinde haar grijpbaar en bevattelijk te maken. Ze is geen 'weergave' of 'spiegel' van de realiteit, maar **een model**, of zoals Nietzsche het zelf formuleerde: een metafoor.

Een van de oudste modellen is de atlas, een boek vol landkaarten van onze aarde. Daar begint het al: een boek, ook al is het groot, kan natuurlijk nooit de bol 'aarde' <u>zijn</u>.
Laten we maar eens de kaart van Noord Brabant voor ons nemen. We zien dan niet alleen dat 's-Hertogenbosch ten noorden van Eindhoven ligt, maar we kunnen ook de afstand tussen die plaatsen bepalen aan de hand van de schaal van de kaart. Zo kunnen we met dit model al heel wat, zeker met de speciale kaarten die ook hoogtelijnen bevatten bijvoorbeeld en kleuren die de grondsoort aangeven.
Je kunt er niet alles mee: een kind begrijpt dat je de breedte van de autoweg tussen Eindhoven en Den Bosch op een wegenkaart niet kunt bepalen door de-breedte-op-de-kaart te vermenigvuldigen met de schaal. Daar was die kaart niet voor. Het model geldt dan niet meer. Met een 'stafkaart' kun je dat nog verdedigen maar als je die kaart gebruikt om de weg te vinden (in Brabant) moet je niet gek kijken als je ergens terecht komt waar alleen tanks en dergelijke rupsvoertuigen kunnen rijden. Ik spreek uit ervaring. Zelfs TomTom (ook een model!!) kan ze bruin bakken als je om 'de kortste weg' vraagt. Een keertje gedaan in Lyon. Je krijgt een totaal ander beeld van die stad!

Geldigheid van een model

Hierboven zagen we reeds dat een model beperkt geldig is. Je kunt dus met een model niet alles verklaren, zelfs niet van onze beperkte technische werkelijkheid. Over psychologie, leerprocessen en economie zullen we het helemaal maar niet hebben. Bij de laatste worden door verabsoluteren van modellen (wat is hier trouwens de werkelijkheid?) de grootste blunders gemaakt!
We moeten dus steeds controleren of het gebruikte model nog geldt voor het probleem dat we proberen te verklaren en/of te voorspellen. Electronici *breadboarden* nauwelijks meer. Deze site staat vol met modellen. Bij 'Another 35 watt Solid State Amplifier' leiden de simulaties met het <u>model</u> Micro Sim8 tot een schitterende versterker, maar instabiliteit werd pas ontdekt na het realiseren van het ding. Dat voorzag MicroSim niet.

Voorbeelden

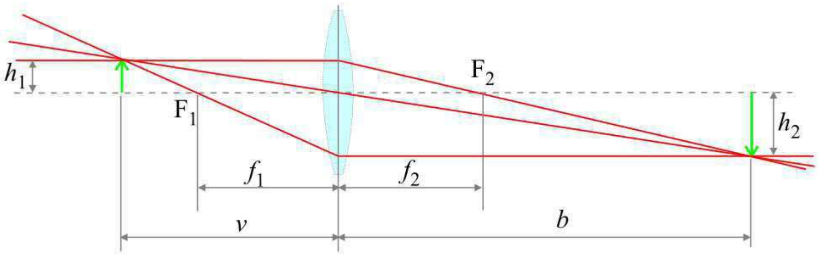
Laten we maar eens naar een aantal modellen kijken die we vroeger op school hebben gehad. Voorbeelden waarmee we al konden rekenen en (eenvoudige) voorspellingen doen.

Licht, lenzen, fotografie

Over het verschijnsel 'licht' zullen we kort zijn omdat we nog steeds niet in staat zijn twee modellen: 'licht als golfverschijnsel' en 'licht als beweging van deeltjes' op elkaar te krijgen. Soms gebruiken we het ene model, op een ander moment het andere. Er is nog een Nobel-prijs te winnen! Nee, laten we even bij de schoolkennis over lenzen blijven.

Lenzen

We hebben het dan over brandpunt-afstand, voorwerp-afstand en beeld-afstand. Weet je het nog?



De lens is hiernaast als een echte lens getekend. Vroeger op school was dat een rechte lijn met pijltjes er aan om aan te geven dat het om een bolle lens ging….. Je kon hier aan rekenen. Immers:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Waarin:

- f = brandpuntsafstand. Deze is positief voor een bolle (positieve) lens en negatief voor een holle (negatieve) lens.
- v = voorwerpafstand (de afstand van het voorwerp tot het optisch middelpunt, gemeten over de hoofdas)
- b = beeldafstand (de afstand van het beeld tot het optisch middelpunt, gemeten over de hoofdas). Deze is positief voor een reëel b eeld en negatief voor een virtueel beeld.

Deze relatie staat bekend als de *lenzenformule* en is ook van toepassing op spiegels. Bij een vlakke spiegel ligt het brandpunt in het oneindige, dus $1/f = 0$. Bij holle en bolle spiegels geeft de lenzen-formule de juiste resultaten, omdat de afleiding net als bij lenzen op gelijkvormige driehoeken geba-seerd is. Een negatieve beeldsafstand geeft een virtueel beeld aan.

zoals het in Wikipedia staat waar natuurlijk nog veel meer te vinden is op dat gebied.

Fotografie

De volgende vraag is: kun je dit 'altijd' gebruiken? Is het model 'altijd' geldig? Kun je hiermee verklaren dat met 'parallel verstellen' (met een technische camera) gebouwen recht blijven en met 'Scheimpflugen' spoorrails van vlak bij tot ver af scherp te krijgen zijn? Ja, dat gaat nog wel, maar is de typische beeldvervorming die daarbij ontstaat daarmee uit te leggen? Hoe leg je met dit eenvoudige model kussenvervorming of tonvervorming uit? Wat is vignettering en scherptediepte? Om van sferische en chromatische aberratie maar te zwijgen.
Bovenstaand model geldt in de praktijk alleen voor grote voorwerpafstanden en kleine lenzen. Toch geeft het inzicht in bijvoorbeeld de tele-werking van een lens met grote brandpuntsafstand….

Wet van Newton

We kennen allemaal nog de wet van Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Waarin: $\vec{F}$ de kracht in Newton is in de richting van de versnelling, m de massa in kilogram, $\vec{a}$ de versnelling in m/s^2.

Bij constante massa is de versnelling van een voorwerp evenredig met de grootte van de kracht op het voorwerp en omgekeerd evenredig met zijn massa.

Waar ging het ook alweer fout? Wanneer geldt het model niet meer? Bij heel grote snelheden! Snelheden in de buurt van de lichtsnelheid. Dan is de massa niet meer constant: $E = mc^2$

Wet van behoud van energie

Dat was ook zo'n leuke: Hoe snel valt een baksteen uit een schoorsteen van 8 m hoogte op straat (als hij losraakt)?

$m.g.h = ½.\ m.v^2$

waarin:
m = de massa van de steen …(kg/m^3),
g = de versnelling van de zwaartekracht …($10\ m/s^2$)
h = de hoogte …(m),
v = de snelheid …(m/s).

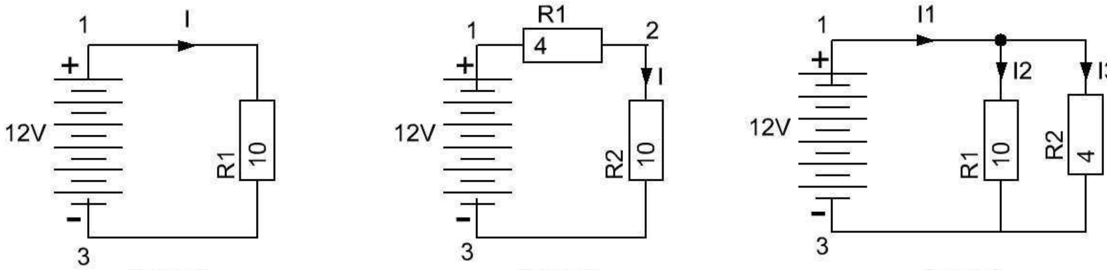
Opl.: $g.h = ½.v^2$
$10.8 = ½.\ v^2$
V = 12,6 m/s (= 45,4 km/h).

We doen bij deze berekening alsof de massa van de steen er niet toe doet. In dit geval (bij een grote massa en lage snelheid) is dat juist. Maar we weten allemaal dat het niet meer opgaat als we een snoeppapiertje (stevig opgepropt) van De Nieuwe Kerktoren in Delft gooien. Het bovenstaande model voldoet om twee redenen niet meer: de snelheid wordt te groot en de soortelijke massa is te klein om geen rekening met de luchtwrijving te hoeven houden. De wrijving met de lucht gaat immers met de derde macht van de snelheid, afgezien van de vorm van het lichaam.
In *vacuüm* wordt het model weer geldig zodat dan:
$10.100 = ½.v^2$, zodat dat propje dan met 22,4 m/s (= 80,5 km/h) op de markt zou aankomen. We zien nu ook meteen in waarom een gevel***plaat*** die (van grote hoogte) neerstort, zo gevaarlijk is.

Maar, hier gaat het ons allemaal niet om. Het is slechts de inleiding op de gebruikte modellen in de ***wisselstroom-techniek***. Dat is immers onze hobby?

Gelijkstroom

Er was eens een knappe man, meneer Georg Ohm, die beweerde:



figuur 1 figuur 2 figuur 3

De stroomsterkte door een geleider is recht evenredig met het potentiaalverschil tussen de uiteinden.

Het quotiënt van spanning en stroomsterkte is dus e en constante. Deze constante wordt de weerstand van de geleider genoemd.

In symbolische notatie: $U = I\ .\ R$

waarin U de spanning of het potentiaalverschil, I de stroomsterkte en R de weerstand is. Wordt U uitgedrukt in V (volt) en I in A (ampère), dan is R in Ω (ohm) uitgedrukt.

In figuur 1 is dus I = 12/10 = 1,2 A,
in figuur 2: I = 12/(10 + 4) = 0,86 A en
in figuur 3: I1 = 12.(10+4)/10.4 = 4,2 A wat volgt uit: I1 = I2 + I3, de eerste wet van Kirchhof:

In elk knooppunt in een elektrische kring is de som van de stromen die in dat punt samenkomen gelijk aan de som van de stromen die vanuit dat punt vertrekken.

$$\sum i_i = 0$$

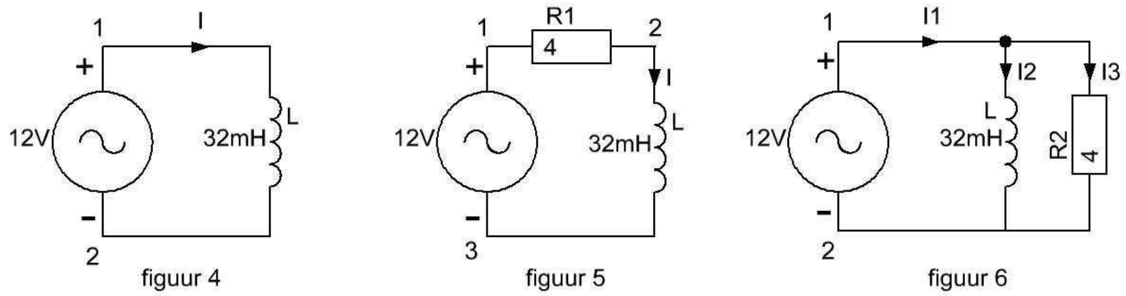
Oh, elektrische stroom heeft dus een richting? Ja! Dat geven de pijltjes aan. De stroom loopt van plus naar min.
De spanning heeft ook 'een richting'. We **spreken af** dat we de spanning van 1 tov 3: U13 noemen en de spanning van 2 tov 1: U21. Dat betekent dus dat U13 = -U31 !! Waar de plus van de batterij werkelijk zit, kunnen we met een voltmeter vaststellen.
Overigens: U13 + U21 + U32 = 0 (in figuur 2) volgens de tweede wet van Kirchof.

Elektrotechniek is een abstract vak net als wiskunde.
Volgens het woordenboek betekent abstract: "niet aanschouwelijk, niet als vorm voorstelbaar, onstoffelijk".
Het tegenovergestelde van abstract is concreet.
Hier vermeldt het woordenboek: "als vorm gedacht of voorstelbaar".
Samengevat: concrete dingen zijn waarneembaar met onze zintuigen, bij abstracte zaken is dat niet het geval.
Alhoewel, als jong jongetje proefde ik aan een Witte-Kat-batterij of er nog spanning op stond. Hoe zuurder hoe beter.

Abstract moeten we niet verwarren met 'geloof' of religie''. Voor mensen die niet abstract kunnen denken, is het onderscheid moeilijk, in ieder geval blijft het vaag. Dit werkt allerlei hinderlijke misverstanden in de hand: kinderen krijgen leukemie van hoogspanningsleidingen in de buurt, je wordt ziek van UMTF-zend-masten. Het kernwoord is: "straling". Dat is 'levensgevaarlijk'. Het erge daarvan is dat er soms veel geld verspijkerd wordt door overheden om de klagers tegemoet te komen.
In de audio-wereld is iets dergelijks aan de hand. Wat er allemaal voor onzin verkocht wordt, letterlijk (vaak voor zeer veel geld) en figuurlijk, is nauwelijks te bevatten. Een voorbeeld: kegeltjes onder de CD-speler verbeteren het geluid. Over luidsprekerkabels en 'interlinks' (dat zijn afgeschermde snoer-tjes!) zullen we het helemaal maar niet hebben…..

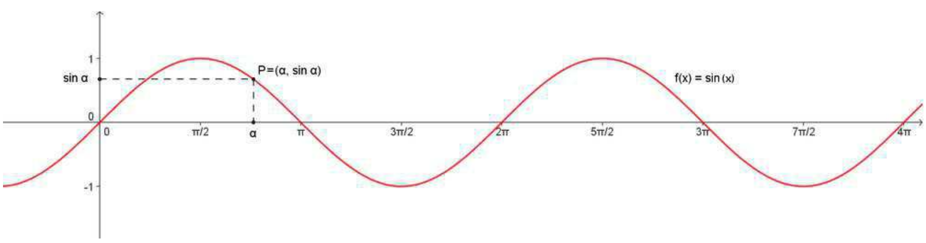
Wisselstroom

Terug naar ons onderwerp. Modellen in een abstract vak. Modellen in modellen dus! Want hoe zit het nu met wisselstromen en spanningen?

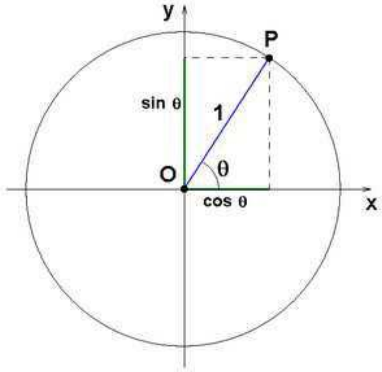


Met wisselspanning bedoelen we hier een sinusvormige spanning. Het symbool geeft het al aan. De 'impedantie' (= de wisselstroomweerstand) van een spoel is Z = ω.L …(Ω) = 2.π.f.L ,
hier: $2.\pi.50.32.10^{-3}$ = 10 Ω, als de bron 50 Hz is. Dus
in figuur 4: I = U12/Z = 12/10 = 1,2 A,
in figuur 5: I = U13/(R1 + Z) = 12/(4+10)….. maar dit is **niet goed!**

We hadden het over sinusvormige spanningen en stromen. Hoe zagen die er ook alweer uit?



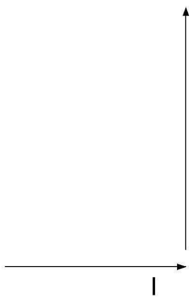
Zo'n sinusvormige lijn kun je ook zien als de projectie op de y-as van een eenparig linksomdraaiende vector:



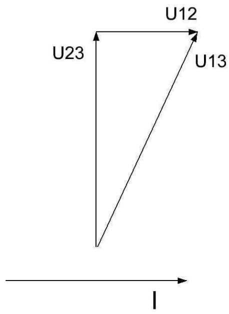
De lengte van de vector is 1. Sin Θ = 0 als de vector (punt P) op de x-as ligt, en wordt 1 als de vector op de y-as ligt (Θ = π/2), wordt weer 0 als Θ = π, enz. Dat kunnen we zien in de grafiek boven. Bij een frequentie van 50 Hz draait de vector 50 keer per seconde rond.

Als we nu weten dat de stroom door een spoel π/2 (of 90^{o}) naijlt op de spanning die over de spoel staat, kunnen we bij sinusvormige spanningen en stromen gebruik maken van deze wiskundige kennis. Deze voorstelling is dus weer een nieuw model! Zo stapelen we model op model. Dat is wetenschap.

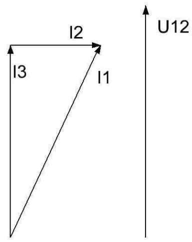
Kortom in figuur 4, 5 en 6 gaat dat er respectievelijk uitzien als figuur 4a, 5a en 6a:



figuur 4a



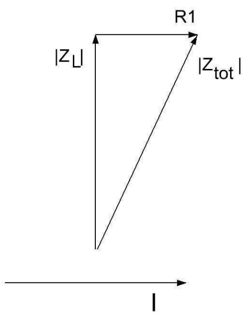
figuur 5a



figuur 6a

Deze figuren draaien dus 50x per seconde linksom rond (ieder apart natuurlijk). We kunnen ons ook voorstellen dat het vlak onder de vectoren rechtsom ronddraait. De figuren staan dan stil.

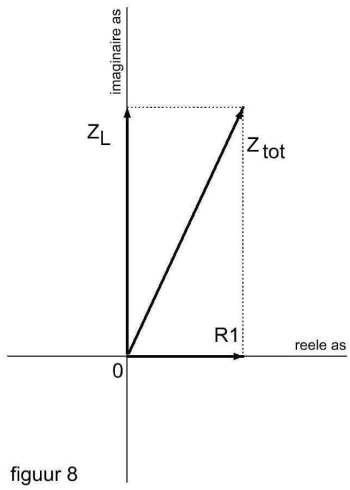
We waren gekomen bij figuur 5 en wisten daar geen raad mee. De oplossing ligt bij figuur 5a. De lengte van de vectoren stellen de absolute waarde van de spanningen en stromen voor. Daarvoor zou je de topwaarde moeten nemen, maar omdat de verhouding tussen de topwaarden en de effectieve waarde √2 is, verandert er aan de verhouding van de vectoren niets. U13 = 12V. Als we U12 weten, kunnen we I uitrekenen. Immers I = U12/R1.
Om dat te kunnen, moeten we de stelling van Pythagoras toepassen. De hoek tussen U23 en U12 is 90^{o}, dus $U13^2 = U23^2 + U12^2 = (I.Z_L)^2 + (I.R1)^2$. Als je dat allemaal netjes subsidieert komt er voor I = 1,11 A uit.
Wacht, dat moet eenvoudiger kunnen! Als we in figuur 5a de spanningen door I delen dan ontstaat figuur 7.



figuur 7

De verticale streepjes rond de Z-waarden geeft aan dat we het over de absolute lengte hebben. Dat is in een figuur niet nodig maar wel als we schrijven:
$|Z_{tot}|^2 = |Z_L|^2 + R1^2 = 10^2 + 4^2 = \sqrt{116} = 10{,}77\ \Omega$.

Als het om vectoren in een vlak gaat, kunnen we wiskundig nog een stapje verder gaan. Bombelli publiceerde al in 1572 een theorie over complexe getallen. Hij had die nodig om wortels uit negatieve getallen te kunnen berekenen. Wij gaan zijn voorstelling gebruiken om onze vectoren in te tekenen. (Weer een nieuw model er bij!) We krijgen er gratis de complexe rekenwijze bij. Die hebben anderen al bedacht. Euler bedacht het getal i voor de wortel uit -1. Dat is in de elektrotechniek niet handig natuurlijk. Hier is het usance om daarvoor de letter j te gebruiken.
Laten we figuur 7 eens in het complexe vlak plaatsen zoals in figuur 8. R1 mogen we gerust evenwijdig verschuiven.
Volgens de complexe rekenwijze mogen we dan schrijven:

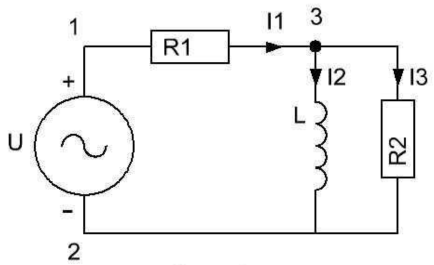


figuur 8

$Z_{tot} = R1 + j.Z_L$

waarin Z_{tot} het complexe getal is met R1 als reëel deel en Z_L als imaginair deel. Het is de gewoonte

om boven een complexe waarde een streep te zetten. Ik weet alleen niet hoe dat moet in Word!
De winst die we met dit alles behalen is dat we voortaan met wisselspanningen kunnen rekenen alsof het om gelijkspanning gaat. Een voorbeeld:



figuur 9

We zullen het eenvoudig houden. Bereken:
I1 = U/Z
Z = R1 + jωL//R2 = R1 + (R2 . jωL) / (R2 + jωL), enz.
Het is natuurlijk wel zaak dat alle grappen uit de gelijkstroomtheorie op je duimpje kent: de wet van Ohm en de wetten van Kirchof is wel het minste. Daarbij komt dan de complexe rekenwijze.
We kunnen nu rekenen en 'leren begrijpen' hoe het toegaat in schakelingen met sinusvormige spanningen en stromen, toch? Wat nu als de toegevoerde signalen niet sinusvormig zijn zoals bijvoorbeeld bij audio? Hier zijn twee antwoorden op:

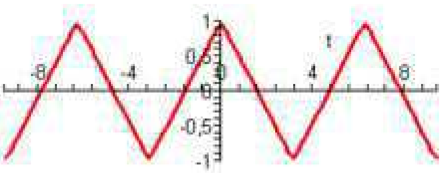
1. Fourier-analyse

$$f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \dots$$

Een **fourierreeks** is een (eventueel oneindige) lineaire combinatie van 'standaardfuncties' die een benadering vormt van een willekeurige periodieke functie, mits deze aan bepaalde voorwaarden voldoet. Voor het bestaan van de fourierreeks is het voldoende als de periodieke functie begrensd is. De gebruikte standaardfuncties zijn sinus- en cosinusfuncties. De coëfficiënten worden bepaald met fourieranalyse, een techniek ontwikkeld door Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Daar zit nogal wat aan vast dus! Een aantal veel voorkomende voorbeelden (van Wikipedia, zonder de taalfouten):

Driehoeksimpuls



Goede benadering met zes termen.
We kiezen de maximale waarde 1 en de minimale -1.

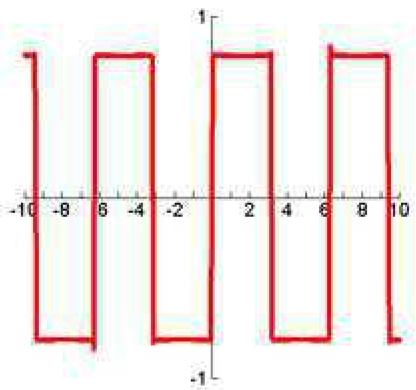
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi}x & \text{als} \quad -\pi < x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}x & \text{als} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Deze even functie is met cosinustermen te benaderen:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}\left\{\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right\}$$

Deze driehoekspuls is continu, de coëfficiënten dalen derhalve vrij sterk, de benadering is reeds na een klein aantal termen goed.

Blokgolf



Met 500 termen is de blokgolf redelijk benaderd.

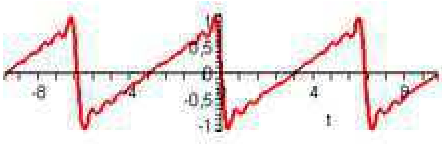
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{als} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 < x < \pi \\ 0 & \text{als} \quad x = 0, \pi \end{cases}$$

Dit is een oneven functie die dus door uitsluitend sinussen benaderd kan worden.

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right\}$$

De blokgolf is **niet** continu. De coëfficiënten dalen daarom ook niet snel. De benadering van een blokgolf is bij een vrij groot aantal termen nog steeds niet goed.

Zaagtandspanning



Zwakke benadering met 11 termen.
We kiezen de maximale waarde 1 en de minimale -1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x & \text{als } -\pi < x < \pi \\ \\ 0 & \text{als } x = \pi \end{cases}$$

Deze oneven functie is met sinustermen volledig te benaderen:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\{\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \dots$$

Deze zaagtandimpuls is **niet** continu, de coëfficiënten dalen derhalve niet snel , de benadering is na een vrij groot aantal termen nog belabberd.

2. Euler)

Euler (1707 – 1783) ontwikkelde veel nieuwe concepten en heeft zeer veel bijgedragen aan de moderne wiskundige notatie; de symbolen i, e en π voor respectievelijk de imaginaire eenheid, het grondtal van de natuurlijke logaritme en de verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel, zijn door hem bedacht. Ook de huidige namen van bijvoorbeeld de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens zijn van hem.

Complexe analyse

Euler leverde ook belangrijke bijdragen aan de complexe analyse. Hij ontdekte wat nu de formule van Euler wordt genoemd:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

waarin een verband wordt gelegd tussen de exponentiële functie en de goniometrische functies.

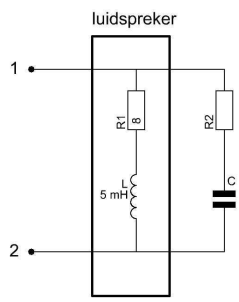
Daar zijn we dan. Kennelijk kun je elke e-macht (= eenmalig verschijnsel) beschrijven met sinussen en cosinussen. Dit is wel erg kort door de bocht, maar Euler toont aan dat de complexe rekenwijze ook gebruikt mag worden als de spanningen en stromen niet sinusvormig zijn. Er zijn voorwaarden aan verbonden, maar daar wordt bij natuurverschijnselen, zoals audio-signalen, steeds aan voldaan.

Voorbeeld uit de praktijk

Zobel-netwerk

Voor een lage tonen luidspreker moet een Zobel-netwerk ontworpen worden. Dat is een RC-combinatie die er voor zorgt dat de ingangs-impedantie van de speaker bij de hogere frequenties niet oploopt, zodat een cross over filter effectiever wordt. De spreekspoel gedraagt zich nu eenmaal inductief.

Stel, de luidspreker is 8 Ω en de spreekspoel heeft een zelfinductie van 5 mH. Hoe moet dat Zobel-netwerk er dan uitzien?



figuur 10

Opl.: De luidspreker kunnen we vervangen (model!) denken door een weerstand van 8 Ω met een zelfinductie van 5 mH in serie. Om dat te compenseren kunnen we dus een capaciteit met een weerstand in serie over de luidspreker zetten. Dat ziet er uit als in figuur 10.

Met ‘hogere frequenties’ wordt bedoeld: frequenties boven het overname-gebied van het cross over filter. Als het om een twee-weg-systeem gaat, zal dat rond de 3 kHz liggen. De impedantie van de speaker-met-Zobel-netwerk moet zeker tot twee maal de overname-frequentie vlak lopen. Dat wil zeggen dat hij daar 'ohms' moet zijn. Dus ohms op 6 kHz.

$Z12 = R1 + j\omega L \;//\; R2 + 1/j\omega C$ (// betekent: parallel aan)

$= (R1 + j\omega L)(R2 + 1/ j\omega C) \,/\, (R1 + j\omega L + R2 + 1/ j\omega C)$,

of als $X_L = \omega L$ en $X_C = 1/\omega C$:

$$\overline{Z} = \frac{(R1 + jXL)(R2 - jXc)}{(R1 + jXL + R2 - jXc)} = \frac{(R1 + jXL)(R2 - jXc)}{R1 + R2 + j(XL - Xc)}$$

Als we teller en noemer met de toegevoegd complexe waarde vermenigvuldigen wordt de noemer N reëel:

$$\overline{Z} = \frac{(R1.R2 + XL.Xc + j(R2.XL - R1.Xc)).(R1 + R2 + j(XL - Xc))}{N}$$

Teller uitsplitsen in reëel deel en imaginair deel:

$$\overline{Z} = \frac{(R1.R2 + XL.Xc + j(R2.XL - R1.Xc)).(R1 + R2 + j(XL - Xc))}{N}$$

Z moet reëel worden dus het imaginaire deel (van de teller) moet 0 zijn. Dat blijkt het geval als:

$$R1.R2.Xc + R^2.Xc + XL.R1.R2 + Xc.XL^2 =$$
$$R2^2.XL + R1.R2.XL + Xc.R1.R2 + Xc^2.XL$$

of: $XL = Xc$ & $R1 = R2$

of: $\omega L = 1/\omega C$, dus $\omega^2 = 1/LC$ (resonantie).

Vullen we dat in dan moet R2 ook 8 Ω worden en $C = 1/ \omega^2 L = 1 / (2 \pi\ 6.10^3)^2.5.10^{-3}$ …(F) of $C = 10^9 / (2 \pi\ 6.10^3)^2.5.10^{-3}$ …nF) = 141 nF.

We blijken met een resonantiekring te maken te hebben die op 6 kHz resoneert. Is er geen gevaar van opslingering? Met andere woorden wat is de Q van de kring?

$Q = \omega L/(R1 + R2) = 2 \pi\ 6.10^3.5.10^{-3} / 16 = 3$.

Daar hoeven we ons geen zorgen over te maken.

En toen?

Je raadt het al, we zijn nog lang niet klaar. Het volgende hoofdstuk zou differentiaalvergelijkingen bevatten (hogere wiskunde). Die zijn handig bij inschakelverschijnselen!
Bij filters kun je ingewikkelde zaken 'kort' opschrijven met het gebruik van Besselfuncties. In feite is dat een andere schrijfwijze van differentiaalvergelijkingen die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Met Word (wat ik onvoldoende beheers) begin ik hier niet aan. Ik denk ook niet dat het nodig is verder te gaan om 'het denken in modellen' te verduidelijken.

Modellen kunnen ook heel fysiek gebruikt worden. Toen er nog geen krachtige computers waren, werd Nederland op schaal nagebouwd in 'Het Waterloopkundig Laboratorium' in Delft. Alle belangrijke waterwegen waren aanwezig. Daarmee kon worden nagegaan wat de gevolgen waren als er 'ergens' een verstoring van bv. een waterniveau plaats vond: in het voorjaar komt er veel meer water uit de Rijn door het smeltwater hogerop. Wat moet je dan doen om overstromingen te voorkomen? Sluizen open zetten, ja, maar welke? Wat gebeurt er dan als het vloed wordt? Enz. enz.
Op hetzelfde lab was ook een bassin waar water hard door kon stromen (op een heel andere schaal). Daar werden scheepsrompen bestudeerd om de vorm voor de minste weerstand te vinden. Ook de vorm van scheepsschroeven werd beschouwd zodat het rendement zo groot mogelijk is bij verschillende snelheden. Er treedt bijna altijd cavitatie op waardoor de schroef 'aangevreten' wordt. Wat moet je daar aan doen?
Dijken werden op kleine schaal nagebouwd en vervolgens aan een stormvloed blootgesteld om te zien welke vorm met welk materiaal het beste was. Hier is trouwens een probleem: zandkorrels

worden keien! Geldt het model dan nog? Moet er gebruik gemaakt worden van speciaal zeer fijn zand? Dat moest eerst uitgezocht worden natuurlijk….

In windtunnels werden vleugelprofielen van vliegtuigen bestudeerd om na te gaan welke vorm de grootste draagkracht gaf bij verschillende snelheden en wanneer een vliegtuig 'overtrokken' raakt. Wanneer treden er ongewenste trillingen op waardoor het vliegtuig onbestuurbaar wordt?

Hoe moet je de remmen van een auto laten werken om zo snel mogelijk te kunnen stoppen? Alleen van achteren remmen (blokkeren) brengt het voertuig in een achterwielslip die heel slecht te beheersen is. Alleen vóór remmen laat de auto kaarsrecht door gaan doch besturing is niet meer mogelijk bij blokkeren. Een combinatie dus. Met autootjes-op-schaal (eind 50-er jaren) is indertijd uitgevogeld dat op alle vier wielen remmen het beste was als er op de achterwielen een anti-blokkeer-inrichting is aangebracht. Daar hebben we tientallen jaren mee rondgereden totdat de digitale computers dermate krachtig waren dat zulke problemen **gesimuleerd** konden worden! Rob Slotemaker leerde ons dat je 'pompend moet remmen' om blokkeren te voorkomen en de auto bestuurbaar bleef. Nu vind je geen auto meer zonder ABS, een gecomputeriseerd remsysteem die dat 'pompen' van je overneemt al of niet vergezeld van ESP……

Club van Rome

Een van de mooiste voorbeelden van een model vind ik nog altijd het wereldmodel van de Club van Rome, uitgewerkt in "*De grenzen van de groei*" (1972), dat het verband legde tussen *bevolkingsgroei*, *voedselproductie*, *industrialisatie*, *uitputting van natuurlijke hulpbronnen* en *vervuiling*. Dit alles in het kader van de *economische groei*.
Het model was geïmplementeerd in de vorm van een Algol-programma. Je kon met de parameters spelen waardoor de andere variabelen van waarde veranderden. De manier waarop dat gebeurde, lag vast in het algoritme van het programma, het model dus. Een echte simulatie derhalve. Je moet je daar niet al te veel bij voorstellen want de computers van toen hadden nog maar een schijntje van de rekenkracht van de huidige iPad…. In veertig jaar is er op dat gebied heel veel veranderd.

(Ik begrijp dan ook niet dat dit jaar (2012) een nieuw rapport is verschenen: *A Global Forecast for de Next Forty Years*, alsof we enige voorspelling kunnen doen over zo'n lange periode. Als ik veertig jaar geleden in een voorlichtingscursus over computergebruik had gezegd dat iedereen over dertig jaar een schoenendoos op zijn bureau zou hebben (thuis!) met een scherm, toetsenbord en muis die een computer zou bevatten die op alle gebied, geheugengrootte, snelheid en user interface, duizend keer zo krachtig zou zijn als de toen in zwang zijnde IBM 360/75 waarvoor een gymzaal nog te klein was, dan was ik dezelfde dag nog opgesloten in de Rijks Psychiatrische Inrichting (RPI) op de Boschdijk in Eindhoven. Schermen en muizen bestonden nog niet eens! De invoer ging op ponskaarten en de uitvoer bestond uit gedrukte tekst op kettingformulieren. Voor wetenschappers werd geëxperimenteerd met telex-terminals: ASR33 van Teletype....)

Computers hadden 'gezag' en er werd geloof aan gehecht! Het woord "milieu" is sinds die tijd niet meer uit de aandacht geweest!
Houd me ten goede, ik zeg niets over de waarde van het model van 1972. Dat hing natuurlijk sterk af van het wereldbeeld wat men toen had. Wat was de werkelijkheid? We hebben het niet meer over een steen die uit de schoorsteen valt! Je moet oppassen dat een model geen ideologie wordt. Dat heeft niets meer met wetenschap te maken. Bovendien gaat de communicatie (via Internet, waar men veertig jaar geleden nog slechts over kon fantaseren) zoveel sneller en kan iedereen er gebruik van maken zodat ONZIN snel verspreid is en een eigen leven gaat leiden. Of dit tot meer democratie leidt, is zeer de vraag. "Vroeger" hadden de media nog een redactie die tenminste enig toezicht hield op 'de gepubliceerde werkelijkheid'. Met Internet is dat totaal verdwenen, zeker als je de zg. sociale netwerken beschouwt. Ook regeringen voeren vaak 'fact free politics': wie het hardste roept heeft gelijk!

Ten slotte

De sombere gedachten van de laatste alinea's nemen niet weg dat de technische vooruitgang veel verbetering heeft gebracht op het gebied van modellen. In CADCAM computersystemen en ontwerpsystemen als AUTOCAD kun je 3D-ontwerpen tekenen en doorrekenen zodat niet alles eerst gemaakt hoeft te worden voordat 'het goed' is. Veiligheidsconstructies in auto's worden uitgebreid getest in gesimuleerde botsingen voordat ze werkelijk tegen een blok beton geslingerd worden. In het laatste geval zitten er test-poppen (= model!) in om te zien hoe een mens het er af zou brengen na een botsing en worden die botsproeven van alle kanten gefilmd om er maar zo veel mogelijk informatie uit te krijgen, anders wordt het helemaal onbetaalbaar.

In de elektronica, die tegenwoordig in hoge mate geïntegreerd is: hele apparaten in één chip, is simulatie onontbeerlijk. Door de te grote afmetingen van een breadboard is de performance niet meer te testen door schakelingen met discrete componenten op te bouwen (breadboarden). Alles wordt tegenwoordig gesimuleerd. De data van de simulatie gaat rechtstreeks naar de chip-fabrikant die deze data omzet en er ‘chips van bakt’, letterlijk. Systemen worden zo ingewikkeld dat ze de complexiteit van ‘de wereld’ (ik bedoel, onze aardkloot met de mensen er op) gaan benaderen. Bovendien wordt die wereld zelf sterk beïnvloed door al deze ‘spullen’.

Oktober 2012.